

ET

05348

1983
013

SERIE RESEARCHMEMORANDA

DE RATIONELE VERWACHTINGSHYPOTHESE

J.H.A. van Maanen

Researchmemorandum 1983-13

sept. 1983



**VRIJE UNIVERSITEIT
EKONOMISCHE FAKULTEIT
AMSTERDAM**

INHOUDSOPGAVE

blz.

Inleiding

1.	<u>Beschrijving en plaatsbepaling</u>	2
1.1	De rationele verwachtingshypothese	2
1.2	Plaatsbepaling van de hypothese	3
2.	<u>Identificeerbaarheid</u>	7
3.	<u>Schattingsprocedures</u>	15
3.1	Inleiding	15
3.2	De voorspellingen als endogene variabelen met meetfouten	15
3.3	De substitutiemethode	16
4.	<u>Een toepassing. Een geschat modelletje van Nederland</u>	20
5.	<u>Besluit</u>	24
6.	<u>Appendix: Het differentiëren van een functie naar de matrix</u>	25
	<u>Geraadpleegde literatuur</u>	27



INLEIDING¹⁾

Dit paper behandelt de rationele verwachtingshypothese. Deze hypothese is in 1961 geformuleerd door Muth en gaat ervan uit dat de voorspellingen van economische subjecten 'are essentially the same as the predictions of the relevant economic theory' (Muth, citaat te vinden in Lucas en Sargent (1981) blz. 3).

In de zestiger jaren bleef het nog stil rond de rationele verwachtingshypothese - in de zeventiger jaren kreeg de hypothese veel aandacht. Deze paper behandelt in het eerste deel een beschrijving en plaatsbepaling van de rationele verwachtingshypothese. Centraal staat dan de vraag wat deze hypothese beoogt en hoe de hypothese in het geheel van de economische theorie wordt gehanteerd.

In het tweede deel worden voorwaarden voor identificeerbaarheid afgeleid. Deze voorwaarden luiden in termen van de structurele vorm. Hiermee is men dan een stap verder dan Wallis (1980) die voorwaarden voor identificeerbaarheid afleidde in termen van de gereduceerde vorm.

In het derde deel komen schattingsprocedures aan de orde. Twee procedures worden besproken.

Een procedure vervangt de vector door de (niet-waarneembare) voorspellingen door de realisaties. Een andere procedure vervangt de vector van voorspellingen door voorspellingen die men uit de gereduceerde vorm van het model kan afleiden.

In deel vier worden deze schattingsprocedures toegepast op een eenvoudig model van Nederland.

1) De auteur dankt de heren J. Plasmans en J. Sijpen die met hun suggesties hebben bijgedragen tot de totstandkoming van deze paper. Tevens dankt hij de heer T. v.d. Aker voor zijn assistentie bij de programmering.

1. BESCHRIJVING EN PLAATSBEPALING

1.1 De rationele verwachtingshypothese

In de ekonomie gaat men ervan uit dat de mens met gegeven middelen een maximaal resultaat tracht te bereiken. Deze mens wordt dan homo oeconomicus genoemd. Om het maximaal resultaat te bereiken is het van belang dat de mens een goed inzicht krijgt in de mogelijkheden, die hij heeft. Een goed toekomstbeeld is belangrijk om zijn mogelijkheden te kennen. Met behulp van dat toekomstbeeld wil hij een goede voorspelling doen over voor hem relevante ontwikkelingen.

Parallel aan het zoekproces van de homo oeconomicus loopt het zoekproces van de economische wetenschap. Economen willen ook een goed toekomstbeeld krijgen. Ook zij willen de toekomst voorspellen.

Vaak konstrueren zij daartoe een model waaruit voorspellingen kunnen worden afgeleid. De rationele verwachtingshypothese gaat ervan uit dat de voorspellingen van de homo oeconomicus en van de ekonoom samenvallen. Dat betekent weer dat de voorspelling van de homo oeconomicus gemodelleerd kan worden alsof het een voorspelling uit de economische wetenschap is. Als dan een economische situatie adequaat beschreven kan worden met een model, is de voorspelling van de homo oeconomicus goed beschreven door een voorspelling uit het model.

Bekijken we dat nog eens nader aan de hand van het volgend model.

Het bestaat uit een stelsel van g simultane vergelijkingen.

$$B y_t + A y_t^* + \Gamma x_t = u_t \quad (1.1)$$

B is een $g \times g$ - matrix van coëfficiënten van de endogene variabelen.

A is een $g \times g$ - matrix van coëfficiënten van voorspellingen van endogene variabelen, zoals die door economische subjekten zijn gemaakt.

Γ is een $g \times k$ - matrix van coëfficiënten van exogene variabelen.

y_t is een vektor ($\in R^g$) van waarnemingen van endogene variabelen.

y_t^* is een vektor ($\in R^g$) van voorspellingen die de economische subjekten van de endogene variabelen hebben gemaakt. Ieder heeft dezelfde informatie en heeft dan ook dezelfde voorspelling. Er is geen instantie of groep die een betere voorspelling heeft.

x_t is een vektor ($\in R^k$) van waarnemingen van exogene variabelen.

u_t is een vektor ($\in R^g$) van storingstermen. Voorts neem ik aan dat u_t niet gekorreleerd is met u_s , $s \neq t$. $u_t \sim N(0, \Sigma)$.

De hypothese van de rationele verwachtingen neemt aan dat de voorspelling van de economische subjecten samenvallen met de voorspellingen die uit de economie kunnen worden afgeleid, dus $y_t^* = E(y_t | I_{t-1})$. Maar dan geldt:

$$y_t^* = - (B + A)^{-1} \Gamma E(x_t | I_{t-1}) \quad (1.2)$$

I_t representeert alle informatie op tijdstip t .

Van x_t wordt aangenomen dat deze beschreven kan worden met een ARMA-proces. Stellen we $E(x_t)$ voor door x_t^* , dan geldt $x_t^* = \sum_i R_i x_{t-i}$ met R_i een matrix van coëfficiënten die uit het ARMA-schema kunnen worden afgeleid.

Systematische voorspelfouten worden niet door economische subjecten gemaakt. Er worden wel voorspelfouten gemaakt maar in die fouten is geen systematiek te onderkennen. De enige bronnen van afwijkingen van y_t^* ten opzichte van y_t zijn u_t - de vektor van storingstermen - en afwijkingen van x_t van opzichte van x_t^* . Zou men deze twee bronnen wegdefiniëren - door te zeggen dat $x_t^* = x_t$ en de storings-term gelijk aan 0 te stellen - dan zou de rationele verwachting overgaan in 'perfect foresight'.

Bekijken we de rol van informatie. De rationele verwachtingshypothese gaat ervan uit dat er voldoende informatie tegen lage kosten te krijgen is zodat mensen goede voorspellingen kunnen vormen. Deze voorspellingen zijn net zo goed als voorspellingen uit de relevante economische theorie. Als de kosten van informatie gaan oplopen kan het verstandig voor mensen zijn om genoeg te nemen met minder goede voorspellingen - doch hiervan gaat de hypothese van de rationele verwachtingen niet uit.

1.2 Plaatsbepaling van de hypothese

Kuipers (1982) meent dat men algemeen-economische theorieën kan indelen aan de hand van het criterium van het prijsmechanisme. Zorgt het prijsmechanisme voor snelle ruiming van alle markten (goederen-, valuta-, vermogens- en arbeidsmarkt) of zijn er hoeveelheidsaanpassingen nodig om de markten te ruimen. Een stroming - de evenwichtstheoretici - meent dat prijzen inderdaad voldoende fluktuëren om door prijsaanpassingen de markten te laten ruimen. Andere stromingen wijzen er op dat op een of meerdere markten de prijzen niet voldoende fluktuëren zodat de partijen aan de lange kant van de markt de hoeveelheden zullen

moeten aanpassen. Hoeveelheidsaanpassingen zorgen dan voor evenwicht op de markten.

De stroming die het eerst is genoemd - de evenwichtstheoretici - vindt haar oorsprong in de theorie van Adam Smith' invisible hand.

Deze theorie is verder uitgewerkt in Walras' veilingmeestermodel.

In dat model worden alle markten geruimd bij evenwichtsprijzen.

Dit proces wordt voorgesteld door een veilingmeester te konstrueren die de (relatieve) prijzen afroept. Na deze afroep wordt gekeken in hoeverre de markten geruimd zijn. Als nog niet alle markten geruimd zouden zijn worden nieuwe (relatieve) prijzen afgeroepen. Zijn de markten daarna wel in evenwicht, dan worden ruiltransakties doorgevoerd. Het is duidelijk dat deze konstruktie niet voor alle markten van toepassing is. Deze konstruktie lijkt onrealistisch omdat voor de meeste markten de prijzen niet zo worden afgeroepen. Zo'n afroep-procedure vindt slechts plaats op valuta-, grondstoffen- en effectenmarkten. Op andere markten moeten de verspreide vragers en aanbieders maar zelf voor een evenwicht zorgen.

Volgens de hypothese van de rationele verwachtingen is er geen enkele reden om aan te nemen dat op andere markten een prijs zal gezet worden, die afwijkt van de prijs die eruit zou rollen als er een veilingmeester zou zijn, die de diverse prijzen zou afroepen.

De reden ligt in het feit dat er een stimulans voor de vragers en aanbieders op markten is om een goed inzicht te krijgen in de marktwerking. Wanneer de markten niet in evenwicht zijn brengt dan nadelen met zich mee. Er zijn zowel nadelen voor vragers als aanbieders. Dat betekent dat beide partijen geprikkeld zullen worden die nadelen te ontlopen. Ze zullen hiertoe informatie gaan verzamelen. Die informatie dient om een zo goed mogelijk inzicht te krijgen in het verloop van de gebeurtenissen op de markt. Zo kan men trachten een optimale situatie voor zichzelf te krijgen. Het is dan niet zinnig aan te nemen dat de voorspellingen, die uit deze informatie zullen rollen, stelselmatig in een richting een fout zullen vertonen. De voorspellingen zullen rond de realisaties heencirkelen. Voorts zullen economische subjekten net zo lang informatie verzamelen totdat de extra kosten die verbonden zijn aan het verzamelen van informatie gelijk zijn aan het extra voordeel dat verbonden is aan de informatie. Hiermee is de essentie van de rationele verwachtingshypothese weer eens aangestipt.

De veilingmeester van Walras kan vervangen worden door het informatie-

zoekproces dat zorgt voor zoveel inzicht bij de deelnemers aan het ruilproces dat alle markten simultaan geruimd kunnen worden bij evenwichtsprijzen.

De introductie van het informatiezoekproces en de voorspellingen conform de rationele verwachtingshypothese zorgt er ook voor dat het nieuwe evenwicht snel bereikt wordt. Economische subjecten hebben een goede voorspelling van het toekomstig evenwicht en van de daarbij horende prijzen. Er is dan geen noodzaak om niet snel tegen nieuwe evenwichtsprijzen nieuwe evenwichtshoeveelheden te verhandelen. Sterker nog: het is in ieders voordeel om snel terecht te komen in de nieuwe evenwichtssituatie om zo de nadelen verbonden aan onevenwichtigheden te ontlopen. Dit geeft modellen met rationele verwachtingen ook het kenmerk dat uitkomsten, die in andere modellen pas op de lange termijn optreden, onmiddellijk naar voren komen.

Het is dan duidelijk dat de rationele verwachtingshypothese funktioneert als een hulptheorie die gebruikt wordt om aan te geven waarom het prijsmechanisme zo perfect werkt. Strikt genomen hoeft de rationele verwachtingshypothese niet verbonden te zijn met de evenwichtstheorie. Ook ekonomen, die menen dat de markten niet altijd in evenwicht zijn kunnen voorspellingen volgens de rationele verwachtingshypothese modelleren. Toch tref je de rationele verwachtingshypothese veel aan bij ekonomen, die ervan uitgaan dat de markten snel door de prijzen geruimd worden. Zij gebruiken de rationele verwachtingshypothese dan om aan te geven waarom alle markten snel door prijzen geruimd worden. Ik ben verder vrijwel geen publikatie tegengekomen waarin men uitging van imperfect werkende markten en waar de voorspellingen gemodelleerd worden volgens de rationele verwachtingshypothese¹⁾.

Toch kan het in die omstandigheden verstandig zijn goede voorspellingen te vormen. Derhalve lijkt het dan zeker niet onzinnig ook dan de voorspellingen te modelleren volgens de rationele verwachtingshypothese.

- 1) De enige publikaties die ik erover gelezen heb zijn Begg (1982) en Buitier (1980). Andere publikaties die in onevenwichtigheidssituaties de rationele verwachtingshypothese hanteren zijn: Taylor (1979), Staggered wage setting in a macro economic model. American Economic Review, Papers and Proceedings (69), pag. 108-113. En Neary en Stiglitz, Towards a reconstruction of Keynesian economics: expectations and constrained equilibria. Quarterly Journal of Economics (1982).

In de literatuur komt men dan ook vaak een evenwichtsmodel tegen waarin de voorspellingen van de economische subjekten zijn gemodelleerd conform de rationele verwachtingshypothese¹⁾.

Er is nog een ander fenomeen dat in modellen met rationele verwachtingen voorkomt, namelijk de 'natural rate'. De natural rate kan worden gedefinieerd als het niveau waarop een variabele - bijv. output, werkloosheid - zich bevindt als de voorspellingen van subjekten niet afwijken van de realisaties. Men treft dan vaak een volgende uitdrukking aan:

$$y_t = y_t^n + \alpha (x_t - x_t^*) \quad (1.3)$$

met y_t : het feitelijk niveau van variabele y ten tijde t .

y_t^n : niveau van de natural rate van y ten tijde t .

x_t : feitelijk niveau van variabele x .

x_t^* : voorspelling van x .

α : is een coëfficiënt.

De voorspelling x_t^* wordt dan conform de rationele verwachtingshypothese gemodelleerd. In deze gedachtengang staan er voor de overheid 2 wegen open om politiek te bedrijven. Een weg loopt via het creëren van een verschil tussen x_t en x_t^* . Als x een prijsvariabele is, kan de overheid door een verrassingsinflatie een verschil tussen x_t en x_t^* veroorzaken. Een andere mogelijkheid is dat de overheid het niveau van de natural rate beïnvloedt. Als y een investeringsgrootte zou voorstellen, dan kan men zich voorstellen dat door een goed gekozen belastingpolitiek het niveau van de natural rate wordt opgeschroefd. Buiter (1980) zegt dan in dit kader 'it is trivial to show that fully anticipated changes in ... policy will have real effects (blz. 39)'. Een voorbeeld van een politiek waarvan de gevolgen bekend zijn is een politiek die gericht is op inflatievergroting. Dat zorgt ervoor dat beleggingen in rentedragende activa toenemen ten koste van beleggingen in geld. Dat veroorzaakt weer aanbodverhoging van geld op de geld- en kapitaalmarkt. Zo kan de reële rente dalen met positieve gevolgen voor investeringen. Als zo de natural rate van de investeringen omhoog gaat, hebben we een voorbeeld van een bekende en qua gevolgen voorziene politiek die via de natural rate positieve invloed uitoefent op een variabele.

1) Voorbeelden zijn Sargent (1976) en Korteweg (1978).

2. IDENTIFICEERBAARHEID

Pesaran (1981) heeft kondities afgeleid voor identificeerbaarheid van modellen met rationele verwachtingen. Deze kondities luiden in termen van de structurele vorm.

Zijn gedachtengang is als volgt: uit de kondities, die op elementen van de structurele vorm liggen en uit het gegeven van identificeerbaarheid van het model in de gereduceerde vorm worden voorwaarden afgeleid voor de identificeerbaarheid van het model. Deze gedachtengang is voor modellen zonder rationele verwachtingen gehanteerd door Fisher¹⁾.

In de aanpak van Pesaran wordt een onderscheid gemaakt tussen exogene variabelen, waarvoor de waarde in de toekomst onbekend is en exogene variabelen, waarvoor de waarde in de toekomst wel bekend is (konstantes, dummy's). Stellen we exogene variabelen waarvan de waarde voorspeld moet worden voor door x_{1t}^* en exogenen, waarvan de waarde voor de toekomst bekend is voor door x_{2t} . Oorspronkelijk (zie bladzijde 3) hadden we de uitdrukking x_t^* ; dit kan worden herschreven tot:

$$x_t^* = \begin{pmatrix} x_{1t}^* \\ x_{2t} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Zo ook:

$$x_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} \quad (2.1)'$$

$$x_{1t}^* \in R^{k_1}, \quad x_{1t} \in R^{k_1}$$

$$x_{2t}^* \in R^{k_2}, \quad x_{2t} \in R^{k_2}$$

$$k_1 + k_2 = k$$

1) Fisher (1966) The Identification Problem, Johnston haalt dit artikel aan in 'Econometric Methods', 2e druk. (1972).

Γ , de matrix van coëfficiënten van exogenen wordt gesplitst in 2 delen: Γ_{01} en Γ_{02} . Γ_{01} is een $g \times k_1$ matrix, die correspondeert met x_{1t} en Γ_{02} is een $g \times k_2$ matrix, die correspondeert met x_{2t} .

Het model luidt:

$$By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t = u_t \quad (\text{zie (1.1)})$$

Substitueer hier de uitdrukking voor y_t^* in zoals die op bladzijde 3 is afgeleid

$$By_t - A(B + A)^{-1} \Gamma x_t^* + \Gamma x_t = u_t \quad (2.2)$$

Hierin worden (2.1) en (2.1)' gesubstitueerd

$$By_t - A(B + A)^{-1} (\Gamma_{01} \Gamma_{02}) \begin{pmatrix} x_{1t}^* \\ x_{2t} \end{pmatrix} + (\Gamma_{01} \Gamma_{02}) \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = u_t \quad (2.3)$$

Voor x_{1t}^* geldt:

$$x_{1t}^* = \sum_{i=1}^g R_i x_{t-i} \quad (2.4)$$

met R_i $k_1 \times k$ matrices van coëfficiënten die het verloop van x_{1t} verklaren uit x_t .

Als $x_{1t} = x_t$ hebben we te maken met een AR-schema.

(2.4) in (2.3):

$$\begin{aligned} By_t - A(B + A)^{-1} \Gamma_{01} \sum_{i=1}^g R_i x_{t-i} + \Gamma_{01} x_{1t} + (I - A(B + A)^{-1}) \Gamma_{02} x_{2t} &= \\ &= u_t \end{aligned}$$

daaruit volgt:

$$\begin{aligned} y_t &= -B^{-1} \Gamma_{01} x_{1t} + B^{-1} A(B + A)^{-1} \Gamma_{01} \sum_{i=1}^g R_i x_{t-i} \\ &\quad - B^{-1} (I - A(B + A)^{-1}) \Gamma_{02} x_{2t} + B^{-1} u_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

Introduceer de volgende nieuwe symbolen:

$$\Pi_0 = -B^{-1}\Gamma_{01} \quad (2.6)$$

$$\Pi_1 = B^{-1}A(B+A)^{-1}\Gamma_{01} \quad (2.7)$$

$$\Pi_2 = -B^{-1}(I - A(B+A)^{-1})\Gamma_{02} \quad (2.8)$$

$$z_t = \sum_{i=1}^q R_i x_{t-i} \quad (2.9)$$

$$v_t = B^{-1}u_t \quad (2.10)$$

Uit (2.6) volgt:

$$B\Pi_0 + \Gamma_{01} = 0$$

Uit (2.7) volgt:

$$\begin{aligned} B\Pi_1 + A\Pi_1 &= A(B+A)^{-1}\Gamma_{01} + AB^{-1}A(B+A)^{-1}\Gamma_{01} \\ &= A(I + B^{-1}A)(B+A)^{-1}\Gamma_{01} \\ &= AB^{-1}(B+A)(B+A)^{-1}\Gamma_{01} \\ &= -A\Pi_0 \end{aligned}$$

daaruit volgt:

$$(B+A)\Pi_1 = -A\Pi_0$$

dus:

$$B\Pi_1 + A(\Pi_1 + \Pi_0) = 0$$

Uit (2.8) volgt:

$$\begin{aligned} B\Pi_2 + A\Pi_2 &= -(I - A(B+A)^{-1})\Gamma_{02} - AB^{-1}(I - A(B+A)^{-1})\Gamma_{02} \\ &= -(I + AB^{-1})(I - A(B+A)^{-1})\Gamma_{02} \\ &= -(I + AB^{-1})(B(B+A)^{-1})\Gamma_{02} \\ &= -(B+A)(B+A)^{-1}\Gamma_{02} \\ &= -\Gamma_{02} \end{aligned}$$

dus:

$$(B + A)\pi_2 + \Gamma_{02} = 0$$

Deze resultaten luiden in matrix-notatie:

$$[B \ \Gamma_{01} \ \Gamma_{02} \ A] \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_2 & \pi_1 \\ I_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_2} & 0 \\ 0 & \pi_2 & (\pi_1 + \pi_0) \end{bmatrix} = 0$$

Restrikties op de parameters in de structurele vorm hebben de volgende vorm:

$$[B_j \ \Gamma_{01j} \ \Gamma_{02j} \ A_j] \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \Gamma_{01} \\ \phi \Gamma_{02} \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

met $B_j, \Gamma_{01j}, \Gamma_{02j}, A_j$ de rij coëfficiënten, die horen bij de j^o vergelijking. $[B_j \ \Gamma_{01j} \ \Gamma_{02j} \ A_j] \in R^{2g+k}$.

Als voorbeeld kan men een nul-restriktie nemen: van een aantal elementen van de rij $B_j, \Gamma_{01j}, \Gamma_{02j}, A_j$ wordt verondersteld dat deze gelijk zijn aan nul. Hiermee corresponderen kolommen in de matrix $[\phi_B' \ \phi_{\Gamma_{01}}' \ \phi_{\Gamma_{02}}' \ \phi_A']'$, die uit nullen bestaan op een uitzondering na: in elke kolom is een niet-nul element, dat korrespondeert met het element in de rij coëfficiënten, dat gelijk is aan nul.

Samengevoegd krijgt men de volgende restricties:

$$[B_j \ \Gamma_{01j} \ \Gamma_{02j} \ A_j] \begin{bmatrix} \phi_B & \pi_0 & \pi_2 & \pi_1 \\ \phi_{\Gamma_{01}} & I_{k_1} & 0 & 0 \\ \phi_{\Gamma_{02}} & 0 & I_{k_2} & 0 \\ \phi_A & 0 & 0 & (\pi_1 + \pi_0) \end{bmatrix} = 0, \quad 0 \in R^{k+k_1+r} \quad (2.11)$$

met k_1 is het aantal elementen van x_{1t}
 k_2 is het aantal elementen van x_{2t}
 k is het aantal exogenen
 r is het aantal kolommen van $[\phi_B' \phi_{\Gamma_{01}}' \phi_{\Gamma_{02}}' \phi_A']'$.

De rang van de matrix in (2.11), noem deze $[\phi, \Pi]$, moet gelijk zijn aan $k + 2g - 1$. Deze rang hoeft niet vol te zijn aangezien B_{ii} op 1 gesteld wordt. Er is dus nog een restrictie, die niet in (2.11) vermeld staat.

Vermenigvuldig $[\phi, \Pi]$ met een niet-singuliere matrix:

$$\begin{bmatrix} B & \Gamma_{01} & \Gamma_{02} & A \\ 0 & I_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(B+A) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \phi_B & \Pi_0 & \Pi_2 & \Pi_1 \\ \phi_{\Gamma_{01}} & I_{k_1} & 0 & 0 \\ \phi_{\Gamma_{02}} & 0 & I_{k_2} & 0 \\ \phi_A & 0 & 0 & (\Pi_1 + \Pi_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A\phi & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{\Gamma_{01}} & I_{k_1} & 0 & 0 \\ \phi_{\Gamma_{02}} & 0 & I_{k_2} & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \Gamma_{01} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ε is een verder niet uitgeschreven produkt, dat voor het verder verhaal niet relevant is.

Aangezien de eerste matrix in (2.12) niet-singulier is, geldt: rang $[\phi, \Pi] = \text{rang}(A\phi) + k + \text{rang}(\Gamma_{01})$.¹⁾ Dit moet gelijk zijn aan $k + 2g - 1$.

- 1) Hier wordt gebruik gemaakt van de stelling dat rang $(AB) = \text{rang}(B)$ als A niet-singulier is.

Het bewijs luidt als volgt:

Men weet: rang $(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$

$$\Rightarrow \text{rang}(AB) \leq \text{rang}(B) \quad (2.13)$$

Tevens weet men: $A^{-1}(AB) = B \Rightarrow$

$$\min(\text{rang}(A^{-1}), \text{rang}(AB)) \geq \text{rang}(B) \Rightarrow \text{rang}(AB) \geq \text{rang}(B) \quad (2.14)$$

Uit (2.13) en (2.14) volgt rang $(AB) = \text{rang}(B)$.

Dus $\text{rang}(A \Phi) + \text{rang}(\Gamma_{01}) = 2g-1$ als het stelsel geïdentificeerd is.

De resultaten zijn als volgt.

Als rangconditie is afgeleid dat $\text{rang}(A \Phi) + \text{rang}(\Gamma_{01})$ gelijk moet zijn aan $2g-1$.

Als ordeconditie kan men afleiden: aantal restricties plus het aantal exogenen waarvan het verloop voorspeld moet worden moet groter of gelijk zijn aan 2 maal het aantal endogenen -1 .

M.a.w. als de restricties de vorm hebben hebben nulrestricties, dan kan men schrijven als ordeconditie:

r (, r = aantal restricties = g - aantal endogene variabelen in j^0 vergelijking (= $\bar{g}$) + k - aantal exogene variabelen in de j^0 vergelijking (= $\bar{k}$) + g - aantal voorspellingen in de j^0 vergelijking (= $\bar{g}^*$)) + $k_1 \geq 2g - 1$.

Korter:

$$2g + k - \bar{g} - \bar{g}^* - \bar{k} + k_1 \geq 2g - 1.$$

Of:

$$k + k_1 \geq \bar{g} + \bar{g}^* + \bar{k} - 1.$$

Het linkerlid is een getal, dat voor alle vergelijkingen identiek is; het rechterlid is een getal dat per vergelijking moet worden 'berekend', het is gelijk aan het aantal elementen in de vergelijking minus één. Het is vrij eenvoudig om op analoge wijze identificeerbaarheidscondities af te leiden voor een stelsel met vertraagde exogene variabelen. Het model luidt:

$$By_t + \sum_{i=0}^m \Gamma_i x_{t-i} + A y_t^* = u_t \quad (2.15)$$

Herschreven:

$$By_t + \sum_{i=0}^m \Gamma_i x_{t-i} - A(B+A)^{-1} \Gamma_0 x_t^* - \sum_{i=1}^m A(B+A)^{-1} \Gamma_i x_{t-i} = u_t$$

Splits x_t weer in elementen die voorspeld moeten worden (x_{1t}) en elementen die bekend zijn (x_{2t}).

Men krijgt dan:

$$By_t + \Gamma_{01}x_{1t} - A(B+A)^{-1}\Gamma_{01}x_{1t}^* + (\Gamma_{02} - A(B+A)^{-1}\Gamma_{02})x_{2t} + \\ + \sum_{i=1}^m (\Gamma_i - A(B+A)^{-1}\Gamma_i)x_{t-i} = u_t$$

Neem voor x_{1t}^* aan:

$$x_{1t}^* = \sum_{i=1}^q R_i x_{t-i}, \quad \text{analoog aan (2.4)}$$

zodat men krijgt:

$$By_t + \Gamma_{01}x_{1t} - \sum_{i=1}^q A(B+A)^{-1}\Gamma_{01}R_i x_{t-i} + (\Gamma_{02} - A(B+A)^{-1}\Gamma_{02})x_{2t} + \\ + \sum_{i=1}^m (\Gamma_i - A(B+A)^{-1}\Gamma_i)x_{t-i} = u_t.$$

Herschikken en de gereduceerde vorm nemen, levert dan op:

$$y_t = -B^{-1}\Gamma_{01}x_{1t} + \sum_{i=m+1}^q B^{-1}A(B+A)^{-1}\Gamma_{01}R_i x_{t-i} \\ - B^{-1}(\Gamma_{02} - A(B+A)^{-1}\Gamma_{02})x_{2t} - \sum_{i=1}^m B^{-1}(\Gamma_i - A(B+A)^{-1}\Gamma_i - \\ A(B+A)^{-1}\Gamma_{01}R_i)x_{t-i} + v_t \quad (2.16)$$

$$= \Pi_0 x_{1t} + \Pi_1 z_t + \Pi_2 x_{2t} + \sum_{i=1}^m \Pi_{i+2} x_{t-i} + v_t \quad (2.16')$$

met $\Pi_0 = -B^{-1}\Gamma_{01}$
 $\Pi_1 = B^{-1}A(B+A)^{-1}\Gamma_{01}$
 $\Pi_2 = -B^{-1}(I - A(B+A)^{-1})\Gamma_{02}$
 $\Pi_{i+2} = -B^{-1}(\Gamma_i - A(B+A)^{-1}\Gamma_i - A(B+A)^{-1}\Gamma_{01}R_i)$
 $z_t = \sum_{i=m+1}^q R_i x_{t-i}$

Weer zijn analoge symbolen gebruikt, die in (2.6) t/m (2.10) zijn voorgesteld.

Hieruit valt af te leiden dat $z_t \neq 0$ moet zijn. Zo niet, dan valt (2.15) niet te onderscheiden van $By_t + \sum_{i=0}^m \Gamma_i x_{t-i} = u_t$.

Derhalve is een eerste voorwaarde die men kan afleiden $z_t \neq 0$ ofwel $q > m$.

Hiermee is een noodzakelijke voorwaarde afgeleid.

Verdere (voldoende) voorwaarden worden via een gelijke methode afgeleid als gedaan is met het model zonder vertraagde exogene variabelen. Eenvoudig valt af te leiden:

$$0 = [B \Gamma_{01} \Gamma_{02} \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m A] *$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_0 & \Pi_2 & \Pi_3 - \Pi_1 R_1 & \Pi_4 - \Pi_1 R_2 & \dots & \dots & \Pi_{m+2} - \Pi_1 R_m & \Pi_1 \\ I_{k_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \Pi_2 & \Pi_3 - \Pi_1 R_1 & \Pi_4 - \Pi_1 R_2 & \dots & \dots & \Pi_{m+2} - \Pi_1 R_m & \Pi_1 + \Pi_0 \end{bmatrix}$$

$$= [B \Gamma_{01} \Gamma_{02} \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m A] * \Pi \quad (2.17)$$

Samen met de restricties op de elementen in de structurele vorm kan men dan per vergelijking noteren:

$$[B_j \Gamma_{01j} \Gamma_{02j} \Gamma_{1j} \dots \Gamma_{mj} A_j] [\Phi \Pi] \quad (2.18)$$

Hieruit kan men afleiden dat als rangconditie geldt:

$$\text{rang}(A \Phi) + \text{rang} \Gamma_{01} \text{ moet gelijk zijn aan } 2g-1.$$

Als ordeconditie geldt dan:

$$k_1 + (m+1)k \geq \bar{g} + \bar{k} + \bar{g}^* - 1, \text{ waarin } m \text{ het aantal vertragingen van exogene variabelen in (2.15) voorstelt.}$$

3. SCHATTINGSPROCEDURES

3.1 Inleiding

Als men het model (1.1) bekijkt, dan ziet men dat men te maken heeft met een vector van voorspellingen, die niet uit data af te lezen is.

Een mogelijkheid om dit probleem aan te pakken is door y_t^* te vervangen door y_t . Men neemt daarbij aan dat de (meet-)fout, die optreedt, niet collineair is met u_t .

Het resultaat is een lineair systeem. Deze procedure wordt in 3.2 besproken.

In 3.3 wordt y_t^* vervangen door voorspellingen die uit de gereduceerde vorm (zie vrgl. (1.2)) af te leiden is. Deze voorspelling is niet waarneembaar omdat de coëfficiënten van de gereduceerde vorm onbekend zijn. Deze onbekende coëfficiënten worden gesubstitueerd in (1.1). Het resultaat is een niet-lineair systeem, waarin men met de ML-methode een schatting kan maken voor de onbekende coëfficiënten.

3.2 De voorspellingen als endogene variabelen met meetfouten

Wickens (1982) betoogt dat men y_t^* in (1.1) kan vervangen door y_t . Hierdoor ontstaat een meetfout η_t , $y_t = y_t^* + \eta_t$. Dit heeft tot gevolg dat (1.1) overgaat in:

$$(B + A) y_t + \Gamma x_t = u_t + A \eta_t \quad (3.1)$$

(3.1) kan via 3SLS of FIML geschat worden.

Aan de volgende voorwaarden moet zijn voldaan:

- i) In geen enkele vergelijking komt zowel een endogene variabele als verwachte endogene variabele voor.

Dit heeft tot gevolg dat geldt: $B_{ij} \neq 0 \Rightarrow A_{ij} = 0$ en $A_{ij} \neq 0 \Rightarrow B_{ij} = 0$. $i, j = 1(1)g$. Als aan (i) niet voldaan is kan men de coëfficiënten van een endogene variabele en van de verwachtingswaarde van die endogene variabele niet scheiden in (3.1).

- ii) (1.1) is geïdentificeerd.
- iii) Er treedt geen autocorrelatie op in het rechterlid van (3.1)
- iv) De meetfout η_t is ongecorrleerd met u_t .

3.3 De substitutiemethode

Deze methode hanteert de ML-methode.

Eerst moet de loglikelihoodfunctie worden afgeleid.

Ter recapitulatie:

$$\text{het model luidt: } By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t = u_t \quad (1.1)$$

$$y_t^* = E(y_t)$$

Nieuw is de volgende aanname:

$$u_t \sim N(0, \Sigma) \quad (3.2)$$

Met behulp van (3.2) kan ook de kansverdeling van y_t gegeven worden:

$$y_t \sim N(-B^{-1}Ay_t^* - B^{-1}\Gamma x_t, B^{-1}\Sigma B^{-1'}) \quad (3.3)$$

Derhalve geldt voor de kansmassafunctie:

$$2 \pi^{-\frac{1}{2}} g(\det(B^{-1}\Sigma B^{-1'}))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \exp(-\frac{1}{2} (By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t)' \Sigma^{-1} (By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t))) \quad (3.4)$$

de likelihoodfunctie is dan:

$$\begin{aligned} L(B, A, \Gamma) &= \prod_{t=1}^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} g(|\det(B)| (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} * \\ &\quad \exp(-\frac{1}{2} (By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t)' \Sigma^{-1} (By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t))) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}ng} (|\det(B)|)^n (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}n} * \\ &\quad \exp(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n ((By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t)' \Sigma^{-1} (By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t))) \end{aligned} \quad (3.5)$$

de loglikelihoodfunctie is dan:

$$\begin{aligned} \log f(B, A, \Gamma) &= -\frac{1}{2}ng \log(2\pi) + n \log(|\det(B)|) - \frac{1}{2}n \log(\det(\Sigma)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n ((By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t)' \Sigma^{-1} (By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t)) \end{aligned}$$

hetgeen vereenvoudigd kan worden tot:

$$\begin{aligned} \log f(B, A, \Gamma) &= -\frac{1}{2}ng \log(2\pi) + n \log(|\det(B)|) - \frac{1}{2}n \log(\det(\Sigma)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} (B Y + A Y^* + \Gamma X) (B Y + A Y^* + \Gamma X)' \end{aligned} \quad (3.6)$$

met tr staat voor trace of spoor, de som van de diagonaalelementen

en $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$ en

$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$

Substitueren we voor $y_t^* = -(B + A)^{-1} \Gamma x_t^*$

dus $Y^* = -(B + A)^{-1} \Gamma X^*$

Met x_t^* een verwachtingsvector van x_t , die berekend is uit het ARMA-proces $\Phi(L)x_t = \Theta(L)\epsilon_t$, voorzover het verloop in de toekomst voorspeld moet worden.

Zo krijgen we uiteindelijk:

$$\begin{aligned} \log f(B, A, \Gamma) &= -\frac{1}{2} n \log(2\pi) + n \log(|\det(B)|) - \frac{1}{2} n \log(\det(\Sigma)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1} (B Y - A(B + A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)^* \\ &\quad (B Y - A(B + A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)') \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hiervan wordt het maximum berekend.

Hierin zijn Y, X^* en X uit data beschikbaar. B, A en Γ worden variabel verondersteld. Tijdens het berekenen van het maximum van $f(B, A, \Gamma)$ wordt Σ op een bepaalde waarde vastgeprikt. Als we het maximum van $f(B, A, \Gamma)$ hebben berekend, dan zou men met behulp van deze kennis U kunnen schatten ($U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$) en zo een nieuwe waarde voor Σ kunnen aangeven.

Zo kan weer opnieuw op zoek gaan naar nieuwe waardes voor B, A en Γ . Een iteratieve schattingsprocedure dringt zich op: om en om worden B, A, Γ en vervolgens Σ geschat.

Wanneer men $f(B, A, \Gamma)$ wilt maximeren wordt vaak gevraagd naar de afgeleides van deze functie naar de onbekende elementen van B, A en Γ . Voor het differentiëren van matrices verwijs ik naar de appendix, die achterin is opgenomen. Ik neem aan dat $\det(B) > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log}{\partial B} f(B, A, \Gamma) &= n \frac{\partial}{\partial B} \log(\det(B)) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial B} \text{tr}(\Sigma^{-1} (B Y - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) \\ &\quad (B Y - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)') \\ &= n(B^{-1})' - \frac{1}{2} (Y(BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)' \Sigma^{-1})' \\ &\quad - \frac{1}{2} ((B+A)^{-1})' (\Sigma^{-1} A)' (\Gamma X^* (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)')^* \\ &\quad ((B+A)^{-1})' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} (B Y - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) Y' \\
& -\frac{1}{2} ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) X^* \Gamma' ((B+A)^{-1}) \\
& = n(B^{-1})' - \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) Y' \\
& - ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) (\Gamma X^*)' ((B+A)^{-1})'
\end{aligned}$$

Wellicht is het duidelijker als men noteert $U = BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X$
 Dan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log}{\partial B} f(B, A, \Gamma) &= n(B^{-1})' - \Sigma^{-1} U Y' \\
& ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} U (\Gamma X^*)' ((B+A)^{-1})'
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log}{\partial A} f(B, A, \Gamma) &= \frac{1}{2} ((B+A)^{-1} \Gamma X^* (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)' \Sigma^{-1})' \\
& -\frac{1}{2} ((B+A)^{-1})' (\Sigma^{-1} A)' (\Gamma X^* (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)')' ((B+A)^{-1})' \\
& +\frac{1}{2} (\Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) X^* \Gamma' ((B+A)^{-1})') \\
& -\frac{1}{2} ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) (\Gamma X^*)' ((B+A)^{-1})' \\
& = \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) (\Gamma X^*)' ((B+A)^{-1})' \\
& - ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) (\Gamma X^*)' ((B+A)^{-1})'
\end{aligned}$$

Wederom: $U = BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X$

Zodat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log}{\partial A} f(B, A, \Gamma) &= \Sigma^{-1} U (\Gamma X^*)' ((B+A)^{-1})' - ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} U (\Gamma X^*)' ((B+A)^{-1})'
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log}{\partial \Gamma} f(B, A, \Gamma) &= \frac{1}{2} (X^* (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)' \Sigma^{-1} A (B+A)^{-1})' \\
& -\frac{1}{2} (X (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X)' \Sigma^{-1})' \\
& +\frac{1}{2} ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) X^* \\
& -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1} \Gamma X^* + \Gamma X) X'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X^*(BY - A(B+A)^{-1}\Gamma X^* + \Gamma X)' \Sigma^{-1} A(B+A)^{-1})' \\
&\quad - \Sigma^{-1} (BY - A(B+A)^{-1}\Gamma X^* + \Gamma X) X' \\
&= ((B+A)^{-1})' A' \Sigma^{-1} U X^* - \Sigma^{-1} U X'
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Als we de onbekende elementen van B, A en Γ onderbrengen in een vector θ , dan kan men een ondergrens voor de asymptotische covariantiematrix van een consistente schatter voor θ berekenen.

Dit is afgeleid uit de stelling van Cramér Rao zoals dat o.a. te vinden is in Rothenberg (1973, blz. 11). Daartoe wordt eerst de informatiematrix R berekend. Voor R geldt:

$R = -E \left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial^2 \theta} \right)$ met θ de vector van onbekende elementen van B, A en Γ . Vervolgens leidt men uit de stelling van Cramér-Rao af dat de ondergrens voor de asymptotische covariantiematrix gelijk is aan R^{-1} . Deze ondergrens wordt bereikt door de ML-schatter, die in de substitutiemethode wordt gehanteerd.

Als we de informatiematrix R analytisch gaan afleiden, dan moet men nog bedenken dat R een symmetrische matrix is.

Bij de berekening van de informatiematrix moet de mathematische verwachting genomen worden. Dat betekent dat $E(U) = 0$ en $E(Y) = -(B+A)^{-1}\Gamma X^*$.

De elementen van de informatiematrix zijn:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad E \left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right), \quad \theta_i = B_{ij} \quad \text{en} \quad \theta_j = B_{kl} \\
= -n (B^{-1})'_{kj} (B^{-1})_{il} \\
\quad - [((B+A)^{-1})' B' \Sigma^{-1} B (B+A)^{-1}]_{ki} * \\
\quad [(B+A)^{-1} \Gamma X^* X^* \Gamma' ((B+A)^{-1})']_{jl}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad E \left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right), \quad \theta_i = A_{ij} \quad \text{en} \quad \theta_j = B_{kl} \\
= -[((B+A)^{-1})' B' \Sigma^{-1} B (B+A)^{-1}]_{ki} * \\
\quad [(B+A)^{-1} \Gamma X^* X^* \Gamma' ((B+A)^{-1})']_{jl}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad E\left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right), \quad \theta_i &= \Gamma_{ij} \quad \text{en} \quad \theta_j = B_{kl} \\
&= [((B + A)^{-1})' B' \Sigma^{-1} B (B + A)^{-1}]_{ki} * \\
&\quad [X^* X^* \Gamma' ((B + A)^{-1})']_{jl}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad E\left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right), \quad \theta_i &= A_{ij} \quad \text{en} \quad \theta_j = A_{kl} \\
&= -[((B + A)^{-1})' B' \Sigma^{-1} B (B + A)^{-1}]_{ki} * \\
&\quad [(B + A)^{-1} \Gamma X^* X^* \Gamma' ((B + A)^{-1})']_{jl}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\text{(v)} \quad E\left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right), \quad \theta_i &= \Gamma_{ij} \quad \text{en} \quad \theta_j = A_{kl} \\
&= [((B + A)^{-1})' B' \Sigma^{-1} B (B + A)^{-1}]_{ki} \\
&\quad [X^* X^* \Gamma' ((B + A)^{-1})']_{jl}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\text{(vi)} \quad E\left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right), \quad \theta_i &= \Gamma_{ij} \quad \text{en} \quad \theta_j = \Gamma_{kl} \\
&= [((B + A)^{-1})' B' \Sigma^{-1} B (B + A)^{-1}]_{ki} \\
&\quad [X^* X^*']_{jl}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

4. EEN TOEPASSING. EEN GESCHAT MODELLETJE VAN NEDERLAND

Het model bestaat uit 6 vergelijkingen.

$$\begin{aligned}
(1) \quad e &= b_1 (MR - CR)^* + b_2 (Pe/Pmg) \\
&\quad + b_3 e_{-1} + b_4 Pcp_{-1} + b_5 (W/Pe) + u_1
\end{aligned}$$

$$(2) \quad eg = b_6 + b_7 e(m) + b_8 \text{ dummy (1973)} + u_2$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad MR - CR &= b_{10} + b_9 Pcp + b_{11} (xg/mg) \\
&\quad + b_{12} \text{ dummy (1973)} + u_3
\end{aligned}$$

$$(4) \quad \tilde{un} = b_{13} + b_{14} e_{-\frac{1}{4}} + b_{15} Powa + u_4$$

$$(5) \quad Pcp = b_{17} + b_{16}W + b_{18}\tilde{RL} + b_{19}Pmg\$ + u_5$$

$$(6) \quad W = b_{21} + b_{20}\tilde{un}^* + b_{22}Pcp_{-1} + b_{23}(lv/e) + u_6$$

Uitleg symbolen

endogene variabelen

- e = nationaal produkt, inklusief voorraadvorming in prijzen 1970
- eg = materiële overheidsuitgaven in prijzen 1970
- $MR-CR$ = wisselkoers van de dollar
- $\tilde{un}$ = werkloosheid als percentage van de afhankelijke beroepsbevolking
- Pcp = prijspeil particuliere consumptie
- W = loonpeil per werknemer in de particuliere sector.

exogene variabelen

- (Pe/Pmg) = prijspeil nationaal produkt / prijspeil invoer (in guldens)
- $e(m)$ = nationaal produkt zonder materiële overheidsuitgaven
- $Powa$ = bevolking van Nederland 15-64 jaar
- $Pmg\$$ = prijspeil invoer (in dollars)
- $\tilde{RL}$ = rentepeil van langlopende titels
- (lv/e) = vraag naar arbeidskrachten/nationaal produkt
- (W/Pe) = loonpeil werknemer/prijspeil nationaal produkt
- (xg/mg) = export/import, beide in prijzen 1970.

u_i zijn storingstermen.

* betreft voorspelling.

De variabelen zijn uitgedrukt in groeivoeten, met uitzondering van de met $\sim$ gemerkte variabelen. Dat zijn $\tilde{RL}$ en $\tilde{un}$; voor beide is het absolute percentage genomen.

De steekproefperiode is 1950-1977.

De data zijn uit het Interplay-bestand van de Katholieke Hogeschool Tilburg. Het model is eerst geschat volgens de in paragraaf 3.2 aangegeven methode. De voorspellingen van de endogenen werden vervangen door de endogenen zelf. Het resulterend lineair model werd met FIML geschat.

Het resultaat:

$$e = -0,79(MR-CR) * -0,72(Pe/Pmg) + 0,07 e_{-1}$$

(-6,64) (-5,95) (0,96)

$$-0,61 Pcp_{-1} + 1,35(W/Pe) [5,69]$$

(-4,24) (9,77)

$$eg = 4,47 + 0,06 e(m) - 5,50 \text{ dummy (1973)} [6,85]$$

(1,82) (0,18) (-0,82)

$$MR-CR = -5,60 + 0,76 Pcp - 0,01(xg/mg) - 3,25 \text{ dummy (1973)} [5,08]$$

(-1,70) (1,21) (-0,37) (-2,44)

$$\tilde{un} = 4,57 - 0,82 Powa - 0,19 e_{-1} [1,18]$$

(9,94) (-2,84) (-4,60)

$$Pcp = 4,15 + 0,05 W + 0,11 Pmg\$ + 0,04 \tilde{RL} [3,08]$$

(2,62) (0,41) (2,74) (0,37)

$$W = 8,31 - 1,17 \tilde{un}^* + 0,55 Pcp_{-1} - 0,36(1v/e) [3,26]$$

(7,16) (-3,29) (3,08) (-3,69)

Achter elke vergelijking is de standaardafwijking van de storingsterm opgenomen. Onder de coëfficiënten staan t-waardes. Deze procedure levert de volgende covariantiematrix¹⁾ van de storings-termen op:

1) Deze covariantiematrix is berekend aan de hand van $u_t - An_t$; zie vrgl. (3.1). Hiermee is een covariantiematrix geïntroduceerd, die afwijkt van de matrix die uit u_t zou volgen.

$$\begin{bmatrix} 32,37 & 2,58 & 15,45 & 3,01 & -3,24 & -11,37 \\ 2,58 & 46,95 & 10,35 & -2,15 & -6,19 & -4,31 \\ 15,45 & 10,35 & 25,86 & -1,95 & -13,56 & -11,19 \\ 3,01 & -2,15 & -1,95 & 1,40 & 1,65 & 0,34 \\ -3,24 & -6,19 & -13,56 & 1,65 & 9,05 & 6,68 \\ -11,37 & -4,31 & -11,19 & 0,34 & 6,68 & 10,61 \end{bmatrix}$$

Deze covariantiematrix werd gehanteerd in de substitutiemethode. Een groot verschil tussen deze substitutiemethode en de eerder gehanteerde methode is de invulling van y_t^* in (1.1).

Bij de eerder gehanteerde methode werd y_t^* vervangen door y_t ; nu wordt y_t^* vervangen door $-(B + A)^{-1} \Gamma x_t^*$, waarin x_t^* een voorspelling is van x_t uit een ARMA-proces dat x_t beschrijft.

Het resultaat:

$$e = 0,359(\text{MR-CR})^* - 0,741(\text{Pe/Pmg}) + \\ (1,795) \quad (-7,065)$$

$$0,265 e_{-1} - 0,58 \text{Pcp}_{-1} + 1,472(\text{W/Pe}) [4,75] \\ (3,748) \quad (-4,208) \quad (11,637)$$

$$\text{eg} = 4,866 + 0,031 e(m) - 9,749 \text{dummy} (1973) [6,42] \\ (1,979) (0,094) \quad (-1,443)$$

$$\text{Mr-CR} = -4,910 + 0,739 \text{Pcp} - 0,029(\text{xg/mg}) - 14,206 \text{dummy} (1973) [4,09] \\ (-1,675) (1,323) \quad (-0,648) \quad (-5,596)$$

$$\tilde{\text{un}} = 4,716 - 1,23 \text{Powa} - 0,131 e_{-1} [1,15] \\ (9,749) (-3,833) \quad (-2,929)$$

$$\text{Pcp} = 4,919 - 0,005 W + 0,144 \text{Pmg\$} - 0,06 \tilde{\text{RL}} [3,06] \\ (2,119) (-0,022) \quad (3,220) \quad (-0,548)$$

$$W = 7,612 - 0,162 \tilde{\text{un}}^* + 0,275 \text{Pcp}_{-1} - 0,268 (1v/e) [3,18] \\ (3,288) (-0,256) \quad (1,854) \quad (-1,998)$$

Onder de coëfficiënten staan t-waarden, die als volgt berekend zijn:

t-waarde = coëfficiënt gedeeld door $\sqrt{\text{covariantiematrix}_{ii}}$ met covariantiematrix_{ii} het ii^o-diagonaalelement uit de asymptotische covariantiematrix zodat die in paragraaf 3.3 is afgeleid. Achter de vergelijkingen staan de standaardafwijkingen van de storingstermen.

Opvallend is dat de andere invulling van y_t^* grote gevolgen heeft voor de coëfficiënten van y_t^* .

De reden kan zijn dat er een verschil optreedt tussen $y_t^* = -(B + A)^{-1} \Gamma x_t^*$ en y_t . De standaardafwijking van dat verschil was voor $(MR-CR)^* - (MR-CR) : 2,80$ en $(\tilde{un})^* - \tilde{un} : 1,15$

Van de overige coëfficiënten veranderden alleen de coëfficiënten van de dummy (1973) in vergelijking 2 en 3 sterk in waarde.

5. BESLUIT

In deze paper is een beschrijving gegeven van de rationale verwachtingshypothese. Voorts is ingegaan op diverse ekonometrische aspecten: de identificeerbaarheidskondities en twee schattingsprocedures.

Conform de schattingsprocedures is een eenvoudig modelletje van Nederland geschat. De grootste verschillen bij de schattingsuitkomsten betreffen de waarden van de coëfficiënten van de voorspellingen. Dit verschil kan men verklaren door de andere wijze van hanteren van deze voorspellingen in de twee schattingsprocedures.

6. APPENDIX

Het differentiëren van een functie naar de matrix.

In het onderstaande wordt uitgegaan van een functie $f(A)$ waarin $f(A) \in \mathbb{R}$ en $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

$\frac{\partial f(A)}{\partial A}$ is een $n \times m$ -matrix, waarbij voor $\left(\frac{\partial f(A)}{\partial A}\right)_{ij}$ geldt dat

$$\left(\frac{\partial f(A)}{\partial A}\right)_{ij} \text{ gelijk is aan } \frac{\partial f(A)}{\partial A_{ij}}.$$

Zodoende is de afgeleide vaak snel te berekenen door een scalaire functie $f(A)$ van een $n \times m$ matrix A uit te schrijven naar de elementen van A en deze functie daarna af te leiden naar die elementen. In het onderstaande treft men diverse afgeleides aan zoals die in dit hoofdstuk worden gehanteerd.

$$(1) \quad \frac{\partial \text{tr } BAC}{\partial A} = \frac{\partial \sum_{ijk} B_{ij} A_{jk} C_{ki}}{\partial A}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{ijk} B_{ij} A_{jk} C_{ki}}{\partial A_{mn}} &= \sum_{ijk} B_{ij} \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial A_{mn}}\right) C_{ki} = \sum_i B_{im} C_{ni} = \\ &= \sum_i C_{ni} B_{im} = (CB)_{nm} \Rightarrow \frac{\partial \text{tr } BAC}{\partial A} = (CB)' \end{aligned}$$

(2) We willen $\left(\frac{\partial A^{-1}}{\partial A_{ij}}\right)_{kl}$ berekenen, waarbij A_{kl}^{-1} het k, l element van A^{-1} is.

Er geldt:

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial A_{ij}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((A + \epsilon B)^{-1} - A^{-1})_{kl}$$

B is een matrix met als ij^0 -element 1; de overige elementen zijn 0.

$$(A + \epsilon B)^{-1} = (A(I + \epsilon A^{-1}B))^{-1} = (I + \epsilon A^{-1}B)^{-1} A^{-1}$$

Voor voldoende kleine geldt:

$$\begin{aligned}(I + \epsilon A^{-1}B)^{-1}A^{-1} &= (I - \epsilon A^{-1}B + \epsilon^2 A^{-1}BA^{-1}B \dots)A^{-1} \\ &= A^{-1} - \epsilon A^{-1}BA^{-1} + \epsilon^2 A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} \dots\end{aligned}$$

zodat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((A + \epsilon B)^{-1} - A^{-1}) = -A^{-1}BA^{-1}$$

zodat

$$\frac{\partial A_{kl}^{-1}}{\partial A_{ij}} = -(A^{-1}BA^{-1})_{kl} = -\sum_{mn} A_{km}^{-1} B_{mn} A_{nl}^{-1} = -A_{ki}^{-1} A_{jl}^{-1}$$

Dat resultaat wordt gebruikt om de volgende afgeleides te berekenen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{tr} P(B+A)^{-1}Q}{\partial A} &= \frac{\partial \sum_{ijk} P_{ij} (B+A)^{-1}_{jk} Q_{ki}}{\partial A} \\ \frac{\partial \sum_{ijk} P_{ij} (B+A)^{-1}_{jk} Q_{ki}}{\partial A_{mn}} &= \sum_{ijk} P_{ij} \left(\frac{\partial (B+A)^{-1}_{jk}}{\partial A_{mn}} \right) Q_{ki} \\ &= \sum_{ijk} P_{ij} (B+A)^{-1}_{jm} (B+A)^{-1}_{nk} Q_{ki} \\ &= \sum_{ijk} (B+A)^{-1}_{nk} Q_{ki} P_{ij} (B+A)^{-1}_{jm} \\ &= -((B+A)^{-1}QP(B+A)^{-1})_{nm} = \\ \frac{\partial \text{tr} P(B+A)^{-1}Q}{\partial A} &= -((B+A)^{-1}QP(B+A)^{-1}),\end{aligned}$$

(3) Stel $f(a) = \det(A)$.

Als we de determinant zien als de som van de elementen van een rij vermenigvuldigd met de bijbehorende cofactoren, kun je schrijven:

$$\det(A) = \sum_k A_{ik} A_{ik}^*, \text{ met } A_{ik}^* \text{ de cofactor bij het } ik^{\text{o}} \text{ element.}$$

$$\text{Dan: } \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ik}} = A_{ik}^*.$$

$$\text{Tevens geldt: } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } A' \Rightarrow \frac{\partial \det(A)}{\partial A} = (A^{-1})' \det(A)$$

$$\frac{\partial \log(\det(A))}{\partial A} = \frac{1}{\det(A)} \frac{\partial \det(A)}{\partial A} = (A^{-1})'.$$

GERAADPLEEGDE LITERATUUR

- Alberro, The Lucas hypothesis on the Phillips curve, Journal of monetary economics, 7, (1981), pag. 239-250.
- Arrow & Hahn General competitive analysis (1971), San Francisco: Holden-Day.
- Begg, The Rational expectations revolution in macro-economics (1982).
- Brunner & Meltzer Friedman's monetary theory and money, debt and economic activity. Beide artikelen verschenen achter elkaar in hetzelfde nummer van Journal of political economy (1972), pag. 837-977.
- Buiter, The macro-economics of dr. Pangloss, A critical survey of the new classical macro-economics, The economic journal, 90, (March 1980), pag. 34-50.
- The superiority of contingent rules over fixed rules in models with national expectations, The economic journal, 91, (Sept. 1981), pag. 649-670.
- McCallum, Rational expectations and the natural rate hypothesis some consistent estimates. Econometrica, vol. 44, no. 1 (Jan. 1976).
- Dwyer, Money Interest and prices in United Kingdom 1870-1913. Research Paper, Emory University (Nov. 1981).
- Hausman, An instrumental variable approach to full information estimators for linear and certain non-linear econometric models. Econometrica, vol. 43, no. 4, (July 1975).
- Hoffman en Schmidt, Testing the restrictions implied by the rational expectations hypothesis, Journal of econometrics 15 (1981), pag. 265-287.
- Fair, A criticism of one class of macroeconomic models with rational expectations, Journal of money, credit and banking, vol. 10, no. 4, (Nov. 1978).
- B. Friedman, Optimal expectations and the extreme information assumptions of 'rational expectations' macromodels, Journal of monetary economics 5, (1979), pag. 23-41.
- Johnston, Econometric methods, (1972), New York, McGraw-Hill.
- Korteweg, The economics of inflation and output fluctuations in the Netherlands, 1954-1975, Journal of monetary economics, (Feb. 1978).
- De stagflatie van de jaren zeventig; feiten en verklaringen, Preadvies voor de vereniging van staathuishoudkunde.

- Lahari en Lee, Rational expectations and the short-run Phillips curve, *Journal of macro-economics*, (lente 1979), vol. 1, pag. 167-190.
- Lucas, Econometric policy evaluation; a critique, *Journal of monetary economics* (1976).
- Lucas & Sargent (editors), *Rational expectations and econometric practice*, (1981), London, George Allen & Unwin.
- Minford and Peel, The natural rate and rational expectations - a critique of some recent developments.
- Mishkin, An econometric investigation, *Journal of political economy*, (1982), vol. 90, no. 11.
- Muth, Rational expectations and the theory of price movements, *Econometrica* (jul. 1961).
- Nelson, *Applied Time Series analysis* (1973), San Francisco: Holden-Day.
- Pesaran, Identification of rational expectations models, *Journal of econometrics*, 16, (1981), 375-398.
- Poole, Rational expectations in the macro model, *Brookings Papers on economic activity*, 1976, no. 2.
- Revankar, Testing of the rational expectations hypothesis, *Econometrica*, vol. 48, no. 6 (september 1980).
- Rothenberg, Efficient estimation with a priori information, *Cowles foundation* (1973).
- Rutledge, *A monetarist model of inflationary expectations*, Lexington Books (1974).
- Sargent, A classical macroeconomic model for the United States, *Journal of political economy* (april 1976).
- A note on maximum likelihood estimation of the rational expectations model of the term structure, *Journal of monetary economics*, 5, (1979), 133-143.
- Shiller, Rational expectations and the dynamic structure of macroeconomic models, *Journal of monetary economics*, 4, (1978), 1-44.
- Alternative tests of rational expectations models, *Journal of econometrics*, 16, (1981), 71-87.
- Sijben, *Rationele verwachtingen en de monetaire politiek*, Stenfert Kroese, Leiden (1979).

Wallis, Econometric implications of the rational expectations hypothesis. *Econometrica*, vol. 48, no. 1, (jan. 1980).

Wickens, The efficient estimation of econometric models with rational expectations. *Review of economic studies* (1982), vol. 44, 55-67.

Wills, Inferring expectations, Research paper, London School of economics (Oct. 1979).

Serie Research Memoranda (I)

- | | | |
|---------|---|---|
| 1980-1 | P. Nijkamp and H. Voogd | New Multicriteria Methods for Physical Planning by Means of Multidimensional Scaling Techniques |
| 1980-2 | H.P. Smit | Medium- and Long-Term Models for the ESCAP-Region - A Review of existing models and a proposal for a new model system |
| 1980-3 | P.v. Dijck en
H. Verbruggen | Productive Employment in Developing Countries' Exporting Industries |
| 1980-4 | P. Nijkamp and L. Hordijk | Integrated Approaches to Regional Development Models; A survey of some Western European Models |
| 1980-5 | P. Nijkamp | Soft Econometric Models; An Analysis of Regional Income Determinants |
| 1980-6 | P. Nijkamp and F.v. Dijk | Analysis of Conflicts in Dynamical Environmental Systems via Catastrophe Theory |
| 1980-7 | E. Vogelvang | A short term econometric Model for the Consumer demand of Roasted Coffee in The Netherlands |
| 1980-8 | N.van Hulst | De effectiviteit van de geleide loonpolitiek in Nederland |
| 1980-9 | P. Nijkamp | A survey of Dutch integrated Energy-Environmental-Economic Policy Models |
| 1980-10 | P. Nijkamp | Perspectives for Urban Analyses and Policies |
| 1980-11 | P. Nijkamp | New developments in Multidimensional Geographical data and Policy Analysis |
| 1980-12 | F.C. Palm, E. Vogelvang
and D.A. Kodde | Efficient Estimation of the Geometric Distributed Lag Model; some Monte Carlo Results on Small Sample Properties |
-
- | | | |
|--------|--------------|---|
| 1981-1 | E. Vogelvang | A quarterly econometric model for the Price Formation of Coffee on the World Market |
| 1981-2 | H.P. Smit | Demand and Supply of Natural Rubber, Part I |
| 1981-3 | R. Vos | The political Economy of the Republic of Korea; A proposal for a model framework of an open economy in the ESCAP-region, with emphasis on the Role of the State |
| 1981-4 | F.C. Palm | Structural Econometric Modeling and Time Series Analysis - Towards an Integrated Approach |